EXCEL VBA による数値計算法についての研究

津田 龍人* 筒井 宣行* 趙 華安†

*九州共立大学工学部電気工学科 †九州共立大学工学部教養教室

Elementary Numerical Computing with EXCEL VBA

Tatsuhiro TSUDA, Yoshiyuki TSUTSUI and Hua-An ZHAO

In this paper, some practical methods concerned with elementary numerical computing will be introduced by EXCEL VBA. These methods including solution of non-linear equations, numerical solution of integration and numerical solution of ordinary differential will be shown by very simple manipulations of a mouse on EXCEL.

Key words: Numerical computing, Newton method, Simpson formula, Runge-Kutte method

1. 緒言

数値計算法は、もちろんコンピュータが誕生してからできた学問ではなく、古くから数学の解析学、代数学、計算理論などの諸分野に数値計算の理論が確立されていた。従来の解析法で解けなかった、また解き方さえも分からない数多くの非線形方程式の問題、積分の計算、微分方程式の解法等に数値計算法が使われている。つまり、数値計算法は近似解を求めることを目的とする数学的な方法である。しかし、膨大な計算を必要とする問題が多く、ほとんど手計算でできないから、古典的な数値計算法は実際に利用されるまでに到ることがなく、数学的な解法にとどまっていた。

1950 年頃から、コンピュータの出現が数値計算法の研究・開発・再認識に拍車と鞭となり、数値計算法を実用化に促した。今日の数値計算法は、コンピュータを抜きにして論じることができなく、古典的な数値計算法に基づいてコンピュータの利用を前提とする新しい数値計算法であり、コンピュータ科学をはじめ、いろいろな工学分野に不可欠な知識及び道具となっている。

数学の応用上で、解析的に（公式などにより）解けない数学問題の解を求めるとき、または解析的な解が直ちに求められないとき、コンピュータを用いて許容誤差の範囲で近似解を求めることがよくある。このようなことが実現できるのは数値計算法である。解析法では、解ける問題の範囲はかなり制限され、特別な形しか解けないことが多い。例えば、方程式 $f(x)=0$ の解法について $x\ln x-1=0$、$2^x=2x+3$ のような非線形方程式はもちろん、$f(x)$が 5 次以上の多項式でも、解析的な解法さえもないから、近似解を求めるしかない。積分計算と微分方程式の解法も同様に特殊な関数ではないと解くことができない。なお、解析的な解き方があるとしても、式の変形・簡単化に高難度の数学知識とテクニックが必要となる場合が多く、かなりの経験が要求される。数値計算法は、最も一般的な方法であるため、適用範囲が広く、方法には制限なく、より多くの問題が解ける。数学のテクニックや経験などを必要としない。数値計算法において、各々の数学問題に対応して確立されている解き方がある。その解き方を踏まえて誰でも簡単に解ける。

本稿は、卒業研究の一部分で、完成した部分のみをまとめたものである。数値積分法、常微分方程式の解法を中心に、まず解き方を説明し、そしてコンピュータによる計算手法として EXCEL VBA を使い、計算方法を説明する。最近、Windows 系のパソコンに EXCEL は標準アプリケーションソフトとしてインストールされているから、この方法を用いればあるいは拡張すれば、専用な数学ソフトが必要

なく、一般的な数値計算問題がマウスだけを動かせば、ほとんど解決できる[1]。本稿で紹介した方法をヒントにして、EXCEL 及びマクロ・VBA を活用することは、情報工学を学ぼうとする学生たちまた情報処理技術者にとって、非常に役立つ技術ともいえよう。

2. EXCEL VBA の概要

EXCEL（エクセル）は、マイクロソフト社のパソコン Windows 上で使用できる最も完成度の高い表計算ソフトであり、いろいろな分野で活用されている。表計算・多数のグラフ機能・データベース機能を除いて高度な科学技術系の計算・演算機能も搭載されているため、その性能と計算能力は非常に多彩で優れている。EXCEL VBA は、Visual Basic for Applications の略でアプリケーションのための Visual Basic と考えても良い。EXCEL VBA の良いところは、BASIC 言語で EXCEL を自由自在に操ることによって、EXCEL の操作を効率よく自動化することできる。マクロとは、アプリケーション上で行う様々な処理を自動的に実行するプログラムのことである。このプログラムを記述する言語を「マクロ言語」という。VBA は、Microsoft Office 専用のマクロ言語で、Microsoft Office 以外では使用できない。Office2000 から、すべての Office 製品に VBA を記述できる機能が付いている。本稿は EXCEL を使ったことがあることを前提として書いたものであるから、EXCEL に関する基礎的な知識と基本的な操作をここで述べない。それに関連する解説は EXCEL の専門書を参照してもらいたい[2], [3]。

u　起動

Excel には、一般操作を行うワークシートの画面とは別に、VBA 記述用の画面が用意されている。図１のように、EXCEL のメニューバーから[ツール(T)]－[マクロ(M)]－[Visual Basic Editor(V)]を選択すると VBE が起動する。

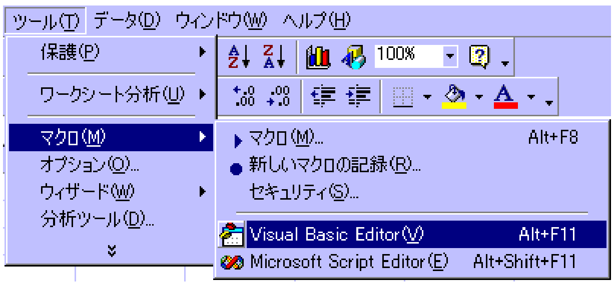

図１．VBE の起動方法

起動した VBE の画面構成は図２のようになる。3 つの部分からなる。左上の部分をプロジェクトエクスプローラ、左下の部分をモジュール種類、右の部分をコードウィンドウという。

u　プロジェクトエクスプローラ

VBE では、作成したプログラム、プログラムを含むブック、ユーザーフォーム、参照設定などを「プロジェクト」として一括管理する。このプロジェクトを管理するツールがプロジェクトエクスプローラである。新しいモジュールを挿入するには、VBE のメニューバーの[挿入(I)]ボタンをクリックして、モジュールの種類を図３のように選択する。

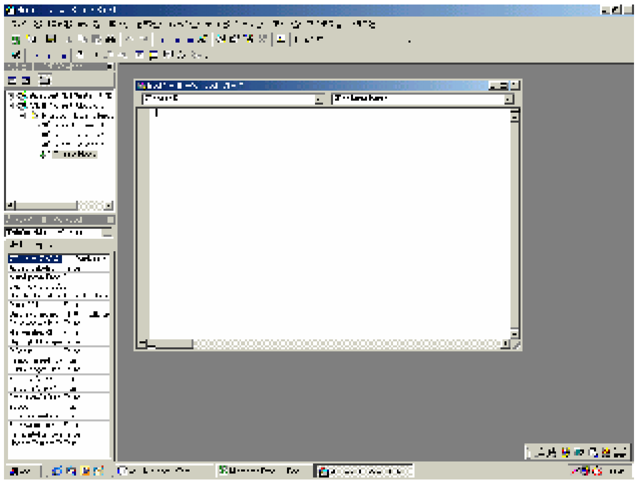

図２．VBE の画面

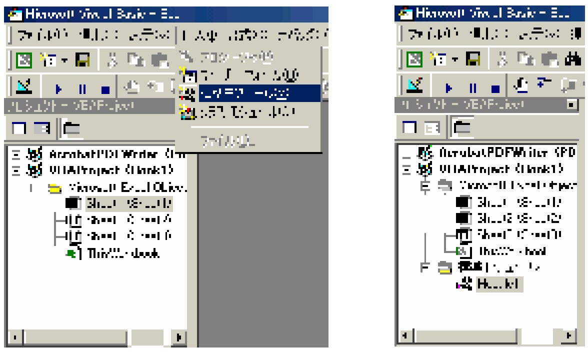

図３．モジュールの挿入追加

u　モジュールの種類

モジュールには図４に示すように４つがあり、プロジェクトエクスプローラ内ではフォルダの形で表示される。

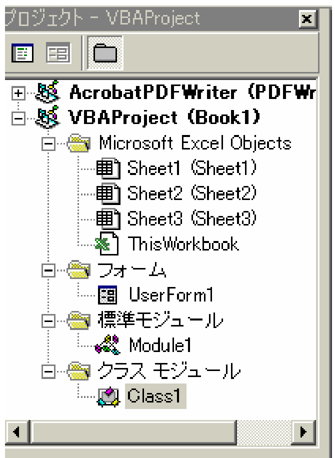

図４．モジュールの種類

（1）　Microsoft Excel Objects モジュール

Excel のシートとブックのイベントに関連付けられたイベントプロシージャを記述するためのモジュール。

（2）フォームモジュール

プロジェクト内に作成したユーザーフォームとコントロールに関連付けられたイベントプロージャを記述するためのモジュール。

（3）標準モジュール

オブジェクトに関連付けられていないマクロや、プロジェクト全体で使うパブリック変数などを記述する

（4）クラスモジュール

オブジェクトが持つメゾットやプロパティを定義するためのモジュール。

なお、今回は標準モジュール使用している。

u　コードウィンドウ

コードの作成、編集を行うツールで、図５のようなウィンドウである。表示するにはプロジェクトエクスプローラからプロジェクト内容を右クリックして[コードの表示(O)]を選択する。

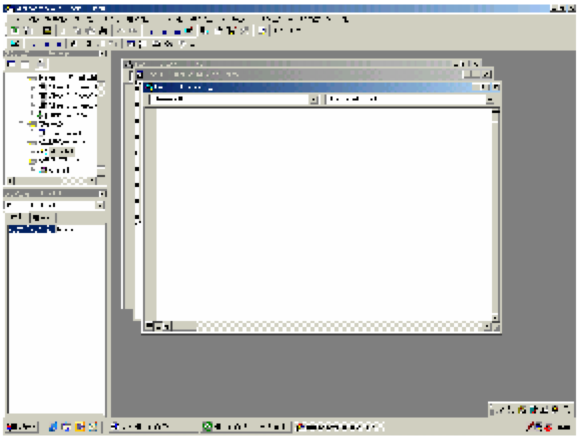

図５．コードウィンドウ

u　コードの記述

コードは図６のようにすべて「コードウィンドウ」に記述する。Sub…()～End Sub と表示されているところにプログラムを書き込む。

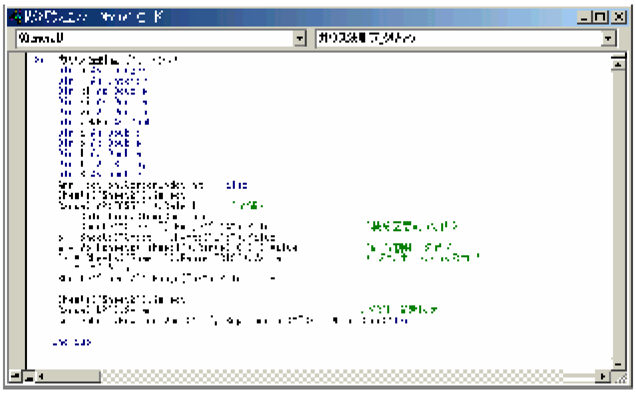

図６．コードの画面

EXCEL VBA はいろいろな分野に利用され、これに関する良い参考書が多く、本稿を作成する際に資料[4]を参照したことがあり、著者に感謝する。なお、EXCEL VBA の説明不足部分は専門書を参考にされたい。

3. 数値積分法

ここで、定積分 $\int_a^b f(x)dx$ の計算方法を考える。一般的な方法は、まずその関数の不定積分を解き、原始関数 $F(x)=\int f(x)dx$ を求める。次に積分区間を代入して計算する。すなわち、

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

という式で計算する。しかし、一般的に任意の関数に対して原始関数を求めるのは、極めて難しいことである。ここで紹介するコンピュータを用いた数値積分法は、原始関数を求めずに定積分の近似解を求める方法である。数値積分の計算法はいろいろあるが、ここでは工学的によく用いられるシンプソン（Simpson）の公式法とガウス法（Gauss method）について解説を行う。

3.1　シンプソン法

シンプソンの公式は次のようになる。

$$\int_a^b f(x)\,dx \fallingdotseq \frac{h}{3}\{\, y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})\,\}$$

となっている。ここで、$h=\dfrac{b-a}{n}$ をきざみの幅といい、n を分割数といい、偶数ではなければならない。

シンプソン法の解き方：

STEP 1:　積分区間[a, b]を n（偶数）等分する。

$x_0=a, x_1=x_0+h, x_2=x_1+h, \ldots, x_{n-1}=x_{n-2}+h, x_n=b$

きざみ幅 h を $h=(b-a)/n$ により求める。

STEP 2:　$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対応して、関数値

$y_0=f(x_0),\quad y_1=f(x_1),\quad \ldots,\quad y_n=f(x_n)$

を求める。

STEP 3:　積分の近似値をシンプソンの公式により求め、定積分の近似値として出力する。

シンプソンの公式は、比較的に精度が高いもので、その誤差はおおよそ h^4 に比例している。したがって、積分区間を 10 分割すれば、誤差が約 10^{-4} の程度となる、といった概算である。工学的な応用分野では、シンプソン法において、一般的に $0.001<h<0.01$ にするのが適当だと思われる。

例として $\int_1^2 \frac{1}{x+1}dx$ を用いて、EXCEL によるシンプソン法を説明する。ただし、n=10 とする。

計算の手順 :

- 図 7 において、セル A2 に分割数 10 を入れて、A4 と A6 に積分区間 a(=1)と b(=2)をそれぞれ入力する。
- セル A8 にきざみの幅を計算する式（式(5.2)）

  =(A6–A4)/A2

  を入力して計算すると、A8 の値は 0.1 となる。
- B2:B12 にオートフィルで番号 0～10 を入力する。
- $x_{i+1}=x_i+h$ により x 軸を分割する。C2 に A4 の内容をコピーし、C3 に計算式 =C2+A$8 を入力する。C3 の内容を C4:C12 にコピーすると、x の分割結果が示される。
- x の分割に対応する y の値（$1/(x+1)$）を求める。セル D2 に計算式 =1/(C2+1) を入力する。そして、D2 の内容を D3:D12 までコピーする。各関数値が図 7 のように得られる。

	A	B	C	D
1	*n*	番号 *i*	*xi*	*yi*
2	10	0	1	0.5
3	*a*	1	1.1	0.47619
4	1	2	1.2	0.454545
5	*b*	3	1.3	0.434783
6	2	4	1.4	0.416667
7	*h*	5	1.5	0.4
8	0.1	6	1.6	0.384615
9		7	1.7	0.37037
10		8	1.8	0.357143
11		9	1.9	0.344828
12		10	2	0.333333

図７．x の分割と関数値

- シンプソンの公式の奇数部分 $\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} y_{2j-1}$ と偶数部分 $\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} y_{2j}$ を計算するため、y の値を奇数目と偶数目に分ける。図８のように、セル E2 に計算式

  =IF(MOD(B2,2)=0,D2,0)

  を入力する。そして、E2 の内容を E3:E12 にコピーする。同様に、セル F2 に計算式

  =IF(MOD(B2,2)=1,D2,0)

  を入力する。F2 の内容を F3:F12 にコピーする。すると、図８のように y の値が偶数目と奇数目に分けられている。
- 偶数部分 $\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} y_{2j}$ と奇数部分 $\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} y_{2j-1}$ の総和をそれぞれ求めるため、セル E14 に

  =SUM(E3:E11)

  を、セル F14 に

  =SUM(F2:F12)

  を入力する。すると、図９の E14 と F14 にそれぞれの総和が求めてある。最後に、セル G2 にシンプソンの公式

  =A8*(E2+E12+4*F14+2*E14)/3

  を入力し、計算した結果は 0.405465 となり、図９の G2 に示されている。

	A	B	C	D	E	F
1	*n*	番号 *i*	*xi*	*yi*	偶数部分	奇数部分
2	10	0	1	0.5	0.5	0
3	*a*	1	1.1	0.47619	0	0.47619
4	1	2	1.2	0.454545	0.454545	0
5	*b*	3	1.3	0.434783	0	0.434783
6	2	4	1.4	0.416667	0.416667	0
7	*h*	5	1.5	0.4	0	0.4
8	0.1	6	1.6	0.384615	0.384615	0
9		7	1.7	0.37037	0	0.37037
10		8	1.8	0.357143	0.357143	0
11		9	1.9	0.344828	0	0.344828
12		10	2	0.333333	0.333333	0

図８．y の値を偶数目と奇数目に分ける

G2 = =A8*(E2+E12+4*F14+2*E14)/3

	A	B	C	D	E	F	G
1	*n*	番号 *i*	*xi*	*yi*	偶数部分	奇数部分	結果
2	10	0	1	0.5	0.5	0	0.405465
3	*a*	1	1.1	0.47619	0	0.47619	
4	1	2	1.2	0.454545	0.454545	0	
5	*b*	3	1.3	0.434783	0	0.434783	
6	2	4	1.4	0.416667	0.416667	0	
7	*h*	5	1.5	0.4	0	0.4	
8	0.1	6	1.6	0.384615	0.384615	0	
9		7	1.7	0.37037	0	0.37037	
10		8	1.8	0.357143	0.357143	0	
11		9	1.9	0.344828	0	0.344828	
12		10	2	0.333333	0.333333	0	
13					和	和	
14					1.61297	2.026171	

図９． EXCEL によるシンプソン法

以上の計算手順を VBA によって実現すると次のようになる。

まず、初期画面を図 10 に示す。ここで積分の解を求めるために関数 $f(x)$、分割数 n、積分区間 a、b をそれぞれ対応するセルに入力する。なお入力時、ルートやπなど EXCEL に用意されている関数は通常の EXCEL と同様に入力する。変数は x を入力する。入力完了後、計算ボタンをクリックする。すると図 11 に示すように下のセルに解が求まる。

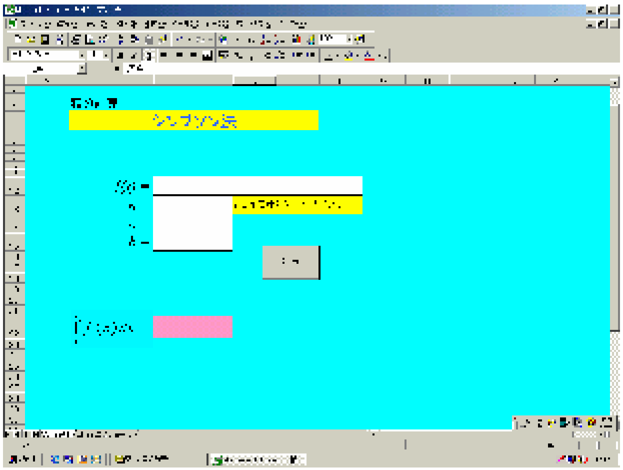

図 10.　シンプソン法初期画面

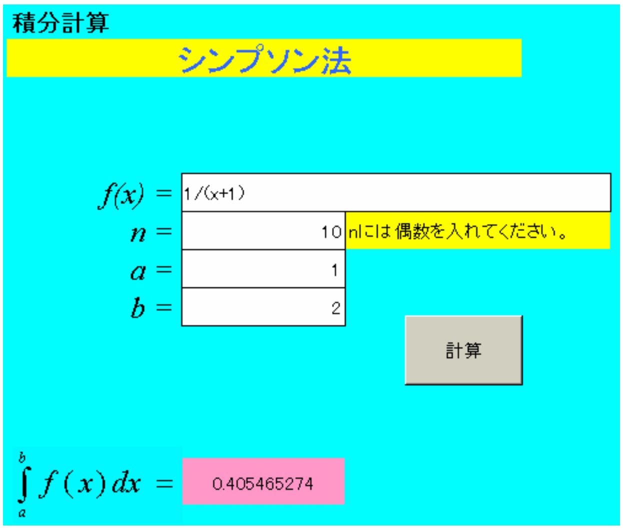

図 11.　シンプソン法結果表示画面

参考にシンプソン法の VBA のプログラムを添付する。

```
-------------------- begin ----------------------------
Sub シンプソン法計算ボタン_クリック()
'     Dim n As Integer
      Dim i As Integer
      Dim guusuu As Double
      Dim kisuu As Double
      Dim k As Double
      Dim h As Double
      Dim kekka As Double
      Dim fx As String
      Dim a As Double
      Dim b As Double
      Dim R As Double
      Application.ScreenUpdating = False
      n=Sheets("Sheet1").Range("C13").Value    'n の代入
      a=Sheets("Sheet1").Range("C14").Value    'a の代入
b=Sheets("Sheet1").Range("C15").Value    'b の代入
h = (b - a) / n
Sheets("Sheet2").Select
Range("A12:E65536").Select         '初期化
      Selection.ClearContents
      fx = Sheets("Sheet1").Range("C12").Value '= をつけ、入力式のコピー
fx = "=" & fx
Sheets("Sheet2").Range("C12").Value = fx
Sheets("Sheet2").Select
Range("C12").Select          'x を B12 に置き換え
ActiveCell.Replace What:="x",
Replacement:="B12", MatchCase:=True
Sheets("Sheet2").Range("A8").Value = h
      If Not n Mod 2 = 0 Then
      R = MsgBox("n に偶数を入力してください", 48)
Sheets("sheet1").Select
     Range("C22").Value = ""
     Exit Sub
End If
Sheets("sheet2").Select
Range("A12").Select   '番号 i
Range("A12") = 0
Selection.AutoFill Destination:=Sheets("sheet2").
Range("A12:A" & n + 12), Type:=xlFillSeries '番号 n を入力
Sheets("sheet2").Range("B12").Value = a 'Xi
Sheets("sheet2").Select
Range("B13").Select
Sheets("sheet2").Range("B13").Value= =B12+$A$8"
Selection.AutoFill Destination:=Sheets("sheet2").
Range("B13:B" & n + 12), Type:=xlFillDefault   'xi
Sheets("sheet2").Range("C12").Activate   'Yi
Selection.AutoFill Destination:=Sheets("sheet2").
Range("C12:C" & n + 12), Type:=xlFillDefault
Sheets("sheet2").Select
Range("D12").Select
Sheets("sheet2").Range("D12").Value= =IF(MOD(A12,2)=0,C12,0)"
Selection.AutoFill Destination:=Sheets("sheet2")
.Range("D12:D" & n + 12), Type:=xlFillDefault '偶数
Sheets("sheet2").Select
Range("E12").Select
Sheets("sheet2").Range("E12").Value= =IF(MOD(A12,2)=1,C12,0)"
Selection.AutoFill Destination:=Sheets("sheet2")
.Range("E12:E" & n + 12), Type:=xlFillDefault '奇数
guusuu = 0#   '偶数部分の計算
Sheets("sheet2").Range("D13").Activate
```

```
    For i = 0 To n - 2
        guusuu = guusuu + ActiveCell.Value
        ActiveCell.Offset(1, 0).Activate
    Next
    Sheets("sheet2").Range("G16").Value = guusuu '偶数和の出力
     kisuu = 0#    '奇数部分の計算
    Sheets("sheet2").Range("E12").Activate
    For i = 0 To n
        kisuu = kisuu + ActiveCell.Value
        ActiveCell.Offset(1, 0).Activate
    Next
    Sheets("sheet2").Range("H16").Value = kisuu    '奇数和の出力
    Sheets("sheet2").Range("D12").Activate        '偶数最終行の検索
    ActiveCell.Offset(n, 0).Activate
    k = ActiveCell.Value
    kekka = Range("A8").Value* (Range("D12").Value + k + 4 *
    Range("H16").Value + 2* Range("G16").Value) / 3
    Sheets("sheet2").Range("H12") = kekka '計算
        Sheets("Sheet1").Select
    Sheets("sheet1").Range("c22") = kekka
End Sub
    ----------------------------    end    ----------------------------
```

3．2 ガウス法

ガウス法をルジャドル・ガウスの公式（Legendre Gauss rule）ともいう。ガウス法は精度の高い数値積分法といわれている。ガウス法を分かりやすく説明ために、まず積分区間を[–1, 1]に限定し、その解き方を説明する。最後に一般積分区間[*a*, *b*]に拡張する。

（1）積分区間[–1, 1]の計算

ここで、$\int_{-1}^{1} f(x)dx$ の解き方について説明する。まず、積分区間[–1, 1]を4分割する（3分点という）。

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \fallingdotseq w_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3 = \frac{5}{9} y_1 + \frac{8}{9} y_2 + \frac{5}{9} y_3$$

上式を 3 **分点のガウス法の公式**と呼び、求積の近似式としてよく知られている。

一般的に *m* 分点（積分区間[–1, 1]を *m*+1 分割する）の場合、積分の近似式が

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \fallingdotseq w_1 y_1 + w_2 y_2 + \mathbf{L\ L} + w_m y_m$$

で表され、これを ***m* 分点のガウス法の公式**と呼ぶ。

m 分点のガウス法は、2*m*–1 次の多項式で近似する場合の精度をもっているから、一般に *m*=3 または 4 の程度で、十分の精度が得られる。*m*=3 と 4 の分点 x_k と重み係数 w_k が表1に示される。

表1．ガウス法の分点と重み係数

m	*x*	*y*
3	$x_1 = -\sqrt{0.6},\ x_2 = 0,$ $x_3 = \sqrt{0.6}$	$w_1 = \frac{5}{9},\ w_2 = \frac{8}{9},$ $w_3 = \frac{5}{9}$
4	$x_1 = -0.861,\ x_2 = 0.340,$ $x_3 = 0.341, x_4 = 0.861$	$w_1 = w_4 = 0.348,$ $w_2 = w_3 = 0.652$

例として積分 $\int_{-1}^{1} \cos\frac{p}{2} x dx$ を用いて、EXCEL によるガウス法を説明する。ただし、*m*=4 とする。

まず、4分点のガウス法の公式

$$\int_{-1}^{1} \cos\frac{p}{2} x dx \fallingdotseq w_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3 + w_4 y_4$$

を用いる。EXCEL を用いた計算手順は次のようになる。

計算手順：

n 図12のように、セル A2:A5 に番号 1～4 を入力し、対応する分点のデータ（表1）を B2:B5 に入力する。

n 関数値 y_1、y_2、y_3 と y_4 を算出するため、セル C2 に計算式 =COS(B2*PI()/2) を入力し、そして C2 の内容を C3:C5 にコピーする。図12のように関数値が得られる。

n セル D2:D5 に各分点に対応する重み係数（表1）をそれぞれ入力する。

C2 = =COS(B2*PI()/2)

	A	B	C	D
1	番号 *i*	分点 *xi*	関数値 *yi*	重み係数 *wi*
2	1	−0.861136	0.216401445	0.347855
3	2	−0.339981	0.860757219	0.652145
4	3	0.339981	0.860757219	0.652145
5	4	0.861136	0.216401445	0.347855

図12．関数値と重み係数

n セル E2 にガウス法の公式

=C2*D2+C3*D3+C4*D4+C5*D5

を入力する。計算結果は図13の E2 に示されているように 1.273229683 となる。

E2 = =C2*D2+C3*D3+C4*D4+C5*D5

	A	B	C	D	E
1	番号 *i*	分点 *xi*	関数値 *yi*	重み係数 *wi*	結果
2	1	−0.861136	0.216401445	0.347855	1.273229683
3	2	−0.339981	0.860757219	0.652145	
4	3	0.339981	0.860757219	0.652145	
5	4	0.861136	0.216401445	0.347855	

図13．計算結果

$\int_{-1}^{1}\cos\frac{p}{2}xdx$ の真値は 1.273239546 となる。ガウス法で求め得た結果は 1.273229683 であり、それを真値と比べて、相対誤差は 7.7×10^{-6} となる。わずか4点の関数値の計算でかなり高い精度を得ている。この例から、ガウス法の良さがよく分かる。

（2）積分区間 $[a, b]$ の計算

ここでは、$\int_{a}^{b} f(x)dx$ を計算するため、ガウス法の利用について解説する。$\int_{a}^{b} f(x)dx$ の計算を、変数変換によって積分区間$[a, b]$を$[-1, 1]$に標準化にしてから、*m* **分点**のガウス法の公式で計算する。

変数$t=\dfrac{2}{b-a}x-\dfrac{b+a}{b-a}$ とおくと、$x=a$ のとき、$t=-1$ となり、$x=b$ のとき $t=1$ となる。即ち、$x=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b-a}{2}t$ となる。積分の変数変換を行うと、次の式が成り立つ。

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{-1}^{1} f(x)\frac{dx}{dt}dt=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)dt$$

上式によって、任意の積分区間の積分はガウス法を用いて計算できるようになる。

以上の計算手順をEXCEL VBAのプログラムで実現すると次のようになる。

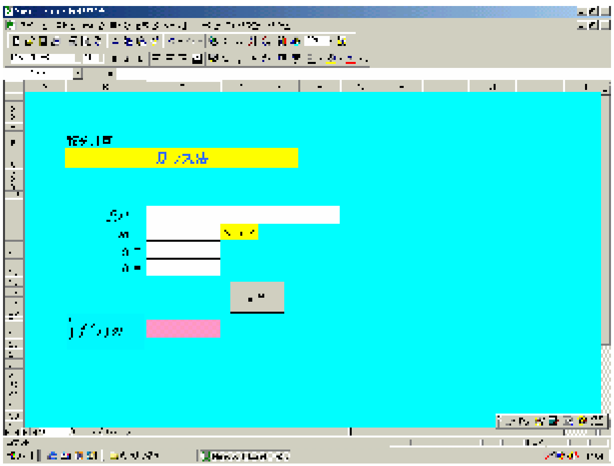

図 14. ガウス法初期画面

まず、初期画面を図 14 に示す。積分の解を求めるために関数 $f(x)$、分点の数 m、積分区間 *a*、*b* をそれぞれ対応するセルに入力する。なお入力時、ルートやπなど EXCEL に用意されている関数は通常の EXCEL と同様に入力する。変数は *x* を入力する。入力完了後、計算ボタンをクリックする。すると図 15 に示すように下のセルに解が求まる。

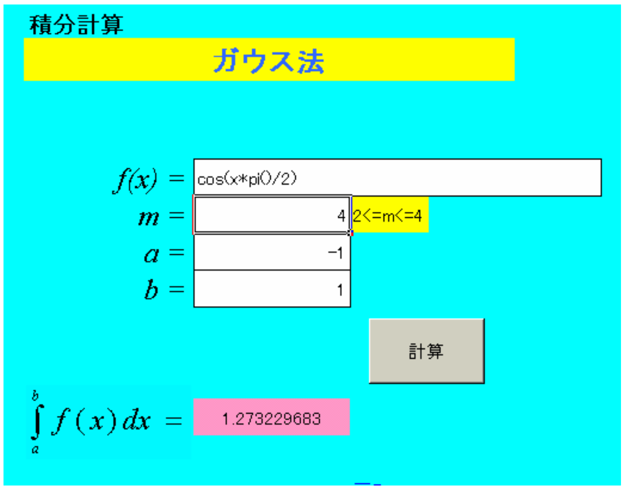

図 15. ガウス法結果表示画面

ガウス法は、*m* 個のデータを使って、$2m-1$ 次の多項式で近似する効果に相当する。要するに、近似する多項式の次数が高くなることにつれて、精度が高くなる。

4. 常微分方程式の解法

微分方程式は、現象の変化を記述に数理科学の様々な分野で用いられている。微分方程式の解を求めることは非常に重要である。しかし、線形微分方程式などの一部分を除いて、解析的にその解を求めることは非常に困難である。

微分方程式には常微分方程式（1変数）と偏微分方程式（2変数以上）がある。本文では、1階常微分方程式の解法だけを説明する。すなわち、扱う微分方程式は $f'=f(x, y)$ となり、(x_0, y_0) を初期値という。高階常微分方程式は、連立1階常微分方程式に帰着できるので、1階常微分方程式の解法を使えば、簡単に解ける。したがって、ここでは1階常微分方程式の解法について説明する。数値計算法の微分方程式の解法は一般解を求めるのではなく、初期値による特殊解の座標を求めるものである。勿論、これらの座標に基づいて、近似法または回帰法を用いれば、特殊解の近似曲線、また近似関数も求められる。

ここでルンゲ・クッタ（Runge-Kutta）法紹介する。この方法は簡単なわりに精度が良く、コンピュータで常微分方程式を解く際の標準解法として広く利用されている。

ルンゲ・クッタ解き方：

(1) 与えられた常微分方程式を $f'=f(x, y)$とし、初期条件 (x_0, y_0) をとし、きざみの幅を *h* とし、特殊解の区間を$[x_0, x_n]$とする。

(2)　特殊解の曲線の座標 $(x_{i+1}, y_{i+1})(i = 0,1,\ldots,n)$

を次のように求める。

$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$y_{i+1} = y_i + k$$

ただし、k は次の式により定まる。

$$k = \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

例として、与えられた微分方程式を $y'=2xy$ とし、初期条件を(0, 1)とする。区間[1, 2]における特殊解の曲線の座標と概形を EXCEL で求めてみる。ただし、きざみの幅を h=0.1 とする。

計算の手順 :

- A 列 : セル A2 にきざみの幅 h を入力し、セル A4 に h/2（A2/2）を入力しておく。
- B 列 : X 軸を $x_{i+1} = x_i + h$ で分割する。B2 に x の初期値 0 を入力し、B3 に

  "=B2+A$2"

  を入力する。B3 の内容を B4～B22 にコピーする。
- C 列 : y の初期値 1 をセル C2 に入力する。
- D 列 : k_1 を計算する。セル D2 に計算式

  "=2*B2*C2"

  を入力する。D2 の内容を D3～D22 にコピーする。
- E 列 : k_2 を計算する。セル E2 に計算式

  "=2*(B2+A$4)*(C2+A$4*D2)"

  を入力する。 E2 の内容を E3～E22 にコピーする。
- F 列 : k_3 を計算する。セル F2 に計算式

  "=2*(B2+A$4)*(C2+A$4*E2)"

  を入力する。 F2 の内容を F3～F22 にコピーする。

  G 列 : k_4 を計算する。セル G2 に計算式

  "=2*(B2+A$2)*(C3+A$2*F2)"

  を入力する。G2 の内容を G3～G22 にコピーする。
- C 列に戻って、y の値を計算する。セル C3 に計算式

  （$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$）

  "=C2+A$2*(D2+2*E2+2*F2+G2)/6"

  を入力する。そして、C3 の内容を C4～C22 にコピーすると、計算結果として、特殊解の座標は（x 座標は B 列の B3 から B22 まで、y 座標は C 列の C3 から C22 まで）図 16 のように得られる。

	A	B	C	D	E	F	G
1	h	xi	yi	k1	k2	k3	k4
2	0.1	0	1	0	0.1	0.1005	0.20201
3	h/2	0.1	1.01005	0.20201	0.306045	0.307606	0.416324
4	0.05	0.2	1.040811	0.416324	0.530813	0.533676	0.656507
5		0.3	1.094174	0.656505	0.7889	0.793533	0.938822
6		0.4	1.173511	0.938809	1.098406	1.105588	1.28407
7		0.5	1.284025	1.284025	1.483049	1.493995	1.72011
8		0.6	1.433329	1.719995	1.975127	1.991711	2.2855
9		0.7	1.632315	2.285241	2.619866	2.644963	3.034898
10		0.8	1.896478	3.034366	3.481934	3.519978	4.047257
11		0.9	2.247903	4.046225	4.655406	4.713279	5.438461
12		1	2.71827	5.43654	6.279204	6.367684	7.381085
13		1.1	3.35346	7.377612	8.561384	8.697518	10.13571
14		1.2	4.220646	10.12955	11.81781	12.02884	14.10118
15		1.3	5.419379	14.09039	16.53453	16.86449	19.89632
16		1.4	7.099125	19.87755	23.46971	23.99057	28.49454
17		1.5	9.487335	28.46201	33.82235	34.6532	41.4485
18		1.6	12.93503	41.39209	49.51529	50.85562	61.27001
19		1.7	17.99176	61.17199	73.67626	75.86451	92.08156
20		1.8	25.53068	91.91045	111.4669	115.0849	140.7488
21		1.9	36.96006	140.4482	171.5316	177.5929	218.8774
22		2	54.58631	218.3452	268.5646	278.8596	346.3835

図 16. ルンゲ・クッタ法

以上の計算手順を EXCEL VBA のプログラムで実現すると次のようになる。

まず、ルンゲ・クッタ法の初期画面を図１７に示す。ここで、特殊解の座標を出すために微分方程式 y'、刻みの幅 h、区間 $[x_0, x_n]$、初期値（x_0, y_0）をそれぞれ対応したセルに入力する。変数は x, y を入力する。入力終了後計算ボタンをクリックすると図 18 に示すように x 座標、y 座標、それに対応したグラフが表示される。

このように、ルンゲ・クッタ法を用いて、１階常微分方程式の特殊解が簡単に求められる。しかも、精度が良い。きざみの幅と求める区間を変えることによって、いろいろな目的に応じて活用できる。

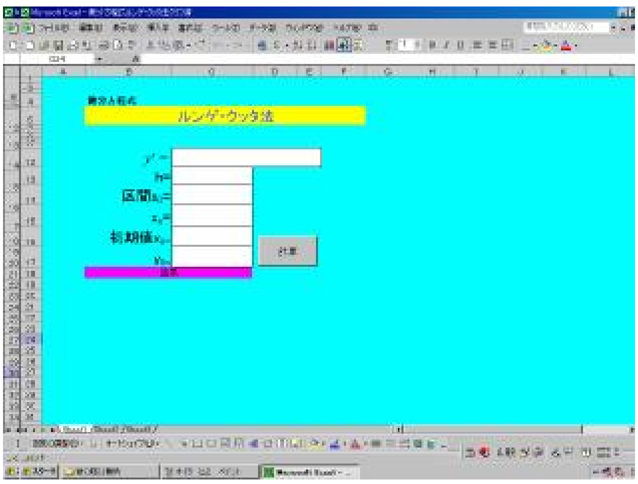

図 17. ルンゲ・クッタ法初期画面

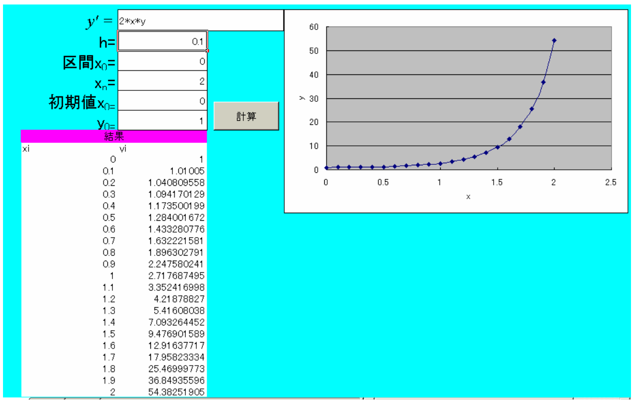

図 18. ルンゲ・クッタ法結果表示画面

最後にルンゲ・クッタ法の精度を考えよう。先の例において、$y' = 2xy$ の解析的な特殊解は $y = e^{x^2}$ である。図 19 に区間[1, 2]におけるその解析解とルンゲ・クッタ法で得た近似解との比較結果が示されている。左側はルンゲ・クッタ法による結果で、右側は解析解の結果である。ルンゲ・クッタ法の精度の良いことが良く分かる。

xi	yi	EXP(x*x)	誤差
0	1	1	0
0.1	1.01005017	1.01005017	4.18E-10
0.2	1.04081077	1.04081077	4.42E-09
0.3	1.09417427	1.09417428	1.82E-08
0.4	1.17351081	1.17351087	5.74E-08
0.5	1.28402526	1.28402542	1.61E-07
0.6	1.43332899	1.43332941	4.20E-07
0.7	1.63231519	1.63231622	1.03E-06
0.8	1.89647847	1.89648088	2.41E-06
0.9	2.24790259	2.24790799	5.4E-06
1	2.71827018	2.7182818З	1.17E-05
1.1	3.35349019	3.35348465	2.45E-05
1.2	4.22064559	4.22069582	5.02E-05
1.3	5.41937928	5.41948071	0.000101
1.4	7.09912473	7.09932707	0.000202
1.5	9.48733548	9.48773584	0.0004
1.6	12.9350291	12.9358173	0.000788
1.7	17.9917611	17.9933096	0.001548
1.8	25.5306794	25.5337217	0.003042
1.9	36.9600624	36.9660528	0.0599
2	54.5863087	54.59815	0.011841

図 19. ルンゲ・クッタ法の精度分析

これまでに説明した微分方程式の数値解法は、全て 1 階微分方程式だけを対象としている。実際には 2 階以上（高階という）の微分方程式が多く現れている。そこで、これまでに学んできた 1 階微分方程式の数値解法を高階微分方程式へ適用する方法を考えよう。これに関する EXCEL VBA の応用を研究しており、本稿を締切りまでに完全に完成していない。

5. むすび

本文は、基本的な数値計算法に関する実用的で、かつ技術的な基礎知識を提供している。プログラミング言語を使わずに EXCEL 上でほとんどマウスだけで数値計算問題を解決できることを示した。勿論、数値計算に関する全部の問題を網羅することはできないが、ヒントとして新しい方法を提供した。EXCEL を用いて解けない数値計算の問題はほとんどないと言っても過言ではない。

参考文献

[1] 趙華安：Excel による数値計算法, 共立出版(2000)
[2] システムサイエンス研究所：Excel2002 VBA 基本例題 350, 技術評論社(2001)
[3] 田中亨：Excel VBA 完全制覇パーフェクト，翔泳社(2003)
[4] 池谷京子：図解 Excel 2002 VBA 編, 毎日コミュニケーションズ(2002)