満足化トレードオフ法による３目的最適化問題の Pareto 解特性

01A3734　相良　栄作
担当教員　三原　徹治

１．はじめに

同時に複数の目的を追求する多目的最適化は最適構造設計の研究分野でも注目されている．その解は一般にトレードオフの関係にある解集合，すなわち Pareto 解集合を形成する．問題を構成する変数がすべて連続数の場合には，満足化トレードオフ法 [1)]によって選考解の選定を行うことができる．すなわち，各目的に対して設定した理想点および希求水準から各目的の満足度を算出し，その最大のものを最小化するという最適性規準に基づく手続きを経て，結果的に各満足度が均一化された解として Pareto 解のひとつを得るものである．しかし，従来の研究の多くは多目的といいながら目的関数が２つだけの２目的最適化問題を取扱っており，目的関数が３つ以上の多目的最適化問題の選考解を満足化トレードオフ法によって求める場面に対する言及はほとんどなされていない．

本研究では，満足化トレードオフ法によって多目的最適化問題の選考解を求める場合の基本的な特性を明らかにするための第一歩として，非常にシンプルな２目的および３目的最適化問題を設定し，その数値実験結果について報告する．

２．２目的最適化問題：問題設定と選考解の特性

まず２目的最適化問題を式(1)に示す．ここに，目的関数Ｐは任意の座標（X_P,Y_P）と点（X,Y）との距離を最小にするという目的を表しており，同様に目的関数 Q は任意の座標（X_Q,Y_Q）との距離の最小化を意味する．

$$\text{目的関数：}\quad P=\sqrt{\left(X_P-X\right)^2+\left(Y_P-Y\right)^2}\rightarrow \min \qquad (1a)$$

$$Q=\sqrt{\left(X_Q-X\right)^2+\left(Y_Q-Y\right)^2}\rightarrow \min \qquad (1b)$$

目的関数 P，Q はいずれも最小化される関数であるため満足度を算出する際の理想点 P_S および Q_S を $P_S=Q_S=0.0$ とすれば，式(1)に示す２目的最適化問題の Pareto 解は線分 PQ であり，任意に設定した目的関数 P，Q の希求水準 P_A および Q_A に対する選考解は，線分 PQ を $P_A：Q_A$ に内分する点として得られる．この特性は，点 P，Q の座標値および希求水準 P_A，Q_A 値によらず常に成立する．換言すれば希求水準 P_A，Q_A 値の設定に制限がない．この特性から従来の研究では，満足化トレードオフ法による選考解探索において希求水準値を「意思決定者の願望を示す数値」と表現するのみで，その設定に関する記述はほとんど見当たらない．

３．３目的最適化問題：希求水準値の設定可能範囲が存在することの指摘

次に３目的最適化問題を式(2)に示す．式(1)の２目的最適化問題に目的関数 R が付加されたものであり，その意味および設定する理想点は 2 目的最適化問題のときと同様である．

(1) Pareto 解：式(2)に示す３目的最適化問題の Pareto 解は，△PQR の境界線を含む内部の領域である．

(2)選考解：目的関数 P，Q，R の希求水準 P_A，Q_A および R_A を $P：Q：R=P_A：Q_A：R_A$ となる点が Pareto 解領域に存在するように設定すれば，その点が選考解である．しかし，$P：Q：R=P_A：Q_A：R_A$ が成立しない場合や $P：Q：R=P_A：Q_A：R_A$ が成立する点が Pareto 解領域外である場合も想定することができる．この点においていかなる希求水準値に対しても選考解が存在する２目的最適化問題と根本的な違いが認められる．

$$\text{目的関数：}\quad P=\sqrt{\left(X_P-X\right)^2+\left(Y_P-Y\right)^2}\rightarrow \min \qquad (2a)$$

$$Q=\sqrt{\left(X_Q-X\right)^2+\left(Y_Q-Y\right)^2}\rightarrow \min \qquad (2b)$$

$$R=\sqrt{\left(X_R-X\right)^2+\left(Y_R-Y\right)^2}\rightarrow \min \qquad (2c)$$

(3)具体例：この２目的最適化問題との根本的な違いを具体的に示すために目的 P，Q，R の固定点座標を(X_P,Y_P)＝(4.5,2.3)，(X_Q,Y_Q)＝(1.5,6.2)，(X_R,Y_R)＝(1.0,1.0)とし，線分 PQ の垂直 2 等分線上の任意の点における P(＝Q)値と R/P 値との関係を図-1 に示す．線分 PQ の垂直 2 等分線上の任意の点は P_A＝Q_A のときの Pareto 解に相当するので R/P 値は P_A＝Q_A＝1.0 のときの R_A値に相当する．図-1 より R/P 値は 0.967～1.820 の範囲内でなめらかに変動し，最大値 1.820 は P＝Q＝2.889 で出現することがわかる．これは，P_A＝Q_A＝1.0 を設定した場合に P：Q：R＝P_A：Q_A：R_Aが成立するためには R_A値は 0.967～1.820 の範囲でしか設定できないことを意味している．ただし，P＞2.460 は△PQR の外側領域の点であり，選考解を Pareto 解から選ぶためには R_A値の設定可能範囲はさらに狭まることになる．

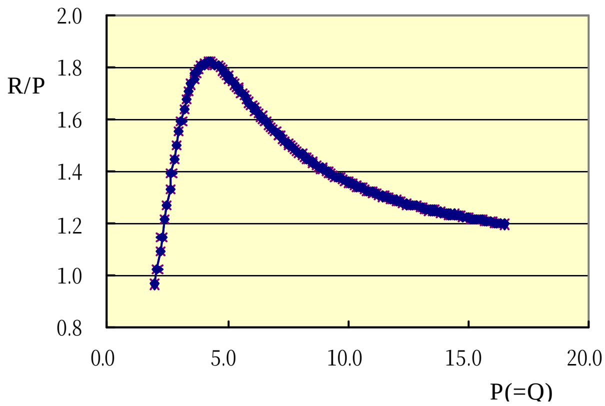

図-1P(=R)～R/P 関係

４．３目的最適化問題：希求水準の限界値

(1)希求水準の限界値の算出：３(3)で用いた具体例について，希求水準 P_A，Q_Aを固定したときに線分 PQ 上の Pareto 解を与える R_Aの限界値 R_A^Uおよび線分 PR(あるいは QR)上の Pareto 解を与える R_Aの限界値 R_A^Lは式(3)で求めることができる．式(3)において，R^Uと P^Uはそれぞれ線分 PQ 上の Pareto 解における R 値と P 値，R^Lと P^Lはそれぞれ線分 PR(あるいは QR)上の Pareto 解における R 値と P 値である．

$$R_A^{U(L)} = \frac{R^{U(L)}}{P^{U(L)}} P_A \qquad (3)$$

ここで，線分 PQ 上の Pareto 解は線分 PQ を P_A：Q_Aに内分する点であることから容易に求めることができる．一方，線分 PR(あるいは QR)上の Pareto 解は P：Q＝P_A：Q_Aを満足する線分 PR(あるいは QR)上の点であることから 2 次方程式を解いて得ることができる．

(2)数値実験結果： P_A＝1.0,1.5,2.0，それぞれの P_Aについて Q_A＝1.0,1.1,...,2.0 とし，式(3)を用いて算出した R_Aの限界値 R_A^U，R_A^Lを表-1 に示す．得られたすべての値は，列挙法をベースとした選考解探索プログラムで別途求めた値と一致し，限界値算出法の妥当性を確認することができた．表-1 から以下のような特性を観察することができる． ①P_A＝1.5,2.0 では Q_A が大きくなると R_A^Uは単調に増加し，R_A^Lは単調に減少するため大きな Q_Aほど R_Aの設定可能範囲が拡がる傾向にある．しかし，結果的に Pareto 解を与える希求水準値の設定可能範囲は充分に広いものではないと評価せざるを得ない． ②P_A＝1.0 のとき，R_A^Uは P_A＝1.5,2.0 と同様に Q_Aが大きくなると単調増加している．しかし，R_A^Lは Q_A＝1.0→1.4 では減少し，Q_A＝1.4→2.0 では増加するという変化を示し，Q_A＝1.4 で最小値をとる．このような単調ではない変化は，希求水準値の設定可能範囲の推測を困難にする．

表-1 P_A,Q_A～R_A^L,R_A^U関係

P_A	Q_A	R_A^L	R_A^U	P_A	Q_A	R_A^L	R_A^U	P_A	Q_A	R_A^L	R_A^U
1.0	1.0	0.551	1.551	1.5	1.0	1.194	2.041	2.0	1.0	1.772	2.548
	1.1	0.454	1.612		1.1	1.132	2.096		1.1	1.721	2.599
	1.2	0.340	1.673		1.2	1.065	2.152		1.2	1.668	2.651
	1.3	0.197	1.736		1.3	0.992	2.209		1.3	1.611	2.704
	1.4	0.002	1.800		1.4	0.913	2.267		1.4	1.551	2.758
	1.5	0.102	1.865		1.5	0.827	2.327		1.5	1.487	2.813
	1.6	0.198	1.930		1.6	0.732	2.387		1.6	1.420	2.869
	1.7	0.291	1.997		1.7	0.627	2.448		1.7	1.348	2.926
	1.8	0.382	2.064		1.8	0.509	2.510		1.8	1.271	2.984
	1.9	0.471	2.131		1.9	0.373	2.573		1.9	1.190	3.043
	2.0	0.558	2.199		2.0	0.210	2.636		2.0	1.103	3.102

参考文献 1)亀廻井寿明,杉本博之,中山弘隆:構造最適設計のための改良型満足化トレードオフ法に関する研究,土木学会論文集,第 441 号, pp.117-126, 1992.1.